



Munich Personal RePEc Archive

## **The Dynamic Nelson-Siegel model: empirical results for Chile and US**

Alfaro, Rodrigo; Becerra, Juan Sebastian and Sagner, Andres  
Central Bank of Chile

23. June 2010

Online at <http://mpra.ub.uni-muenchen.de/25912/>  
MPRA Paper No. 25912, posted 14. October 2010 / 18:07

# **Estimación de la Estructura de Tasas utilizando el modelo Dinámico Nelson Siegel: Resultados para Chile y EEUU**

Rodrigo Alfaro  
Banco Central de Chile

Sebastián Becerra  
Banco Central de Chile

Andrés Sagner  
Banco Central de Chile

Esta versión: 23/06/2010

## **Resumen**

El modelo de curva de rendimiento propuesto por Nelson y Siegel (1987) ha sido utilizado con éxito por distintas instituciones financieras y bancos centrales. El ajuste a los datos ha sido justificado por la flexibilidad de las funciones presentes en el modelo. En este artículo proponemos una versión discreta del modelo la cual puede ser obtenida a través de asumir como válida la hipótesis de expectativas en logaritmo y de que la tasa más corta de la economía se explica por factores dinámicos. Bajo este escenario obtenemos que el modelo impone que todas las tasas de madurez finita pueden ser modeladas con un proceso ARIMA(2,1,2). Finalmente, se el modelo es implementado para la curva de bonos del Tesoro Americano y los bonos del Banco Central de Chile.

## **I. Introducción**

La estimación de la curva de rendimiento ha sido una tarea de interés tanto para los analistas financieros como para los académicos. Los modelos de un factor, usualmente derivados en tiempo continuo, como Vasicek (1977) y Cox, Ingersoll y Ross (1985), cumplen con el principio de no-arbitraje pero muestran pobre ajuste a los datos (Wilmott, 2007). Esta evidencia ha llevado a los analistas a preferir métodos matemáticos más flexibles que permitan un mejor ajuste de la curva. En esta línea uno de los trabajos más destacados es Nelson y Siegel (1987) quienes proponen un modelo que no solo presenta un ajuste razonable para varias curvas de rendimiento sino que además contiene restricciones para las tasas cortas y largas, permitiendo que estas sean bien definidas. Diebold y Li (2006) reconocen en el modelo tres factores que favorecen su ajuste empírico, los cuales están relacionados con el nivel de la curva, su pendiente y su curvatura. Por otro lado, Coroneo, Nyholm y Vidova-Koleva (2008) reporta una amplia lista de organizaciones públicas, bancos de inversión y bancos centrales que utilizan el modelo Nelson-Siegel o una extensión de este para ajustar la curva de rendimiento o realizar proyecciones. Dentro de las extensiones más populares destaca la

desarrollada por Svensson (1994) quien incorpora un cuarto factor que correspondería a una segunda curvatura, permitiendo con este que el modelo presente un mejor ajuste.

Shreve (2004) presenta los resultados de los modelos teóricos de tiempo continuo, Vasicek y Cox-Ingersoll-Ross (CIR) con dos factores, los cuales presentan mejor ajuste a los datos. El autor muestra que el modelo de Vasicek tiene forma cerrada mientras que el caso de CIR deber ser resuelto numéricamente. En este último caso el analista puede resolver numéricamente una ecuación diferencial parcial, similar a la que se obtiene en el caso de opciones financieras con múltiples activos subyacentes o una ecuación diferencial ordinaria, la cual permite la identificación de los parámetros “afines”.

Diebold y Li (2006) postulan que los parámetros del modelo Nelson-Siegel pueden ser considerados de forma dinámica. Christensen, Diebold y Rudebusch (2009) exploran si el modelo Dinámico Nelson-Siegel (DNS) puede ser considerado dentro de los modelos teóricos de tiempo continuo que imponen la no existencia de oportunidades de arbitraje. Sus resultados indican que el modelo DNS es similar a un modelo multifactorial en el cual se consideran 3 factores dinámicos. Alfaro (2009) presenta un resultado similar utilizando el Factor de Descuento Estocástico (FDE) con el cual se deriva el precio del bono cero-cupón. Bajo el supuesto que los factores dinámicos son homocedásticos, el autor encuentra que existe un premio por plazo que es función de los segundos momentos de los factores. La metodología del uso del FDE es propuesta por Campbell, Lo y MacKinlay (1997) para el caso de un factor, quienes muestran la equivalencia entre sus resultados y los modelos de Vasicek y CIR.

Este artículo presenta dos resultados analíticos relevantes en la segunda sección. Primero se deriva el modelo DNS utilizando la Hipótesis de Expectativas en Logaritmos (HEL) y una dinámica determinada sobre los factores. Segundo, se demuestra que el modelo implica que todas las tasas de madurez finita pueden ser modelas como un proceso ARIMA(2,1,2). Las siguientes secciones presentan los resultados para los casos de Chile y EEUU, en donde la estimación del parámetro no lineal del modelo se realiza en una segunda etapa a través de una grilla de valores posibles. Bajo este método encontramos que el parámetro que es válido para ambos países es 0.95, lo que se encuentra alineado con lo que reporta Morales (2008) y Diebold y Li (2006) para los casos de Chile y EEUU, respectivamente.

## II. Discusión Teórica y Empírica del Modelo DNS

Nelson y Siegel (1987) establecen un modelo de tiempo continuo en que la tasa de madurez  $n$  corresponde a la siguiente forma funcional:

$$z(n) = \lambda_1 + \lambda_2 \left[ \frac{1 - \exp(-\alpha n)}{\alpha n} \right] + \lambda_3 \left[ \frac{1 - \exp(-\alpha n)}{\alpha n} - \exp(-\alpha n) \right], \quad (1)$$

donde  $\alpha > 0$  es un parámetro no lineal, el cual asumiremos conocido por el investigador, mientras que los parámetros  $\lambda$ 's son estimados para las distintas fechas que se desea computar la curva de rendimiento y los definiremos como factores de la curva. Esta forma funcional ha sido bastante cómoda para ajustar los diversos perfiles de la curva de rendimiento observados para distintos países. A diferencia de los ajustes vía polinomios, la forma funcional propuesta por los autores contiene en los límites inferior y superior valores acotados para las tasas.

En particular notamos que la función  $\exp(-\alpha n)$  toma valor 1 cuando la madurez es cero, mientras que converge a cero cuando la madurez es grande. Dado que en general la madurez se mide en número de meses,  $n$  puede tomar un valor máximo de 360 (bono a 30 años). Debido a que la función exponencial es acotada podemos tener valores exactos para los casos en que la madurez es cero (tasa instantánea), y para una tasa ficticia cuya madurez sea infinita. En el primer caso el elemento que acompaña al segundo factor converge a uno, mientras que el elemento asociado al tercer factor se hace cero. De este modo la tasa más corta del modelo es simplemente la suma de los dos primeros factores. Para el caso de la tasa larga, tenemos que el elemento asociado al segundo factor se hace cero al igual que aquel que acompaña al tercer factor. Por tanto, la tasa larga del modelo corresponde sólo al primer factor. En conclusión el modelo implica que el primer factor corresponde a la tasa larga, mientras que el segundo es la diferencia entre la tasa corta y la larga.

Diebold y Li (2006) establecen que el primer factor corresponde al nivel de la curva, mientras que el segundo corresponde al negativo del premio por plazo. Este último se entiende como la diferencia entre la tasa larga y la corta e implica la pendiente de la curva de rendimiento. El tercer factor no participa de estas tasas pero permite que el

modelo sea suficientemente flexible para acomodar distintas curvas de rendimiento por lo que los autores lo denominan curvatura. En la práctica, puede ser aproximado por una combinación lineal entre una tasa de mediano plazo, y las tasas corta y larga del modelo.

Si bien el modelo Nelson-Siegel ha sido exitoso para ajustar curvas de rendimiento, es importante señalar contiene implicancias económicas que pueden ser interesantes para el análisis dinámico del mercado de instrumentos de renta fija. Siguiendo a Diebold y Li (2006) consideraremos que los factores son dinámicos y tomando el trabajo de Alfaro (2009) trabajaremos con el modelo Dinámico de Nelson-Siegel (DNS) en su versión discreta como sigue:

$$z_{nt} = \lambda_{1t} + \frac{\lambda_{2t}}{n} \left( \frac{1-\phi^n}{1-\phi} \right) + \frac{\lambda_{3t}}{n} \left[ \left( \frac{1-\phi^n}{1-\phi} \right) - n\phi^{n-1} \right]. \quad (2)$$

Esta adaptación se basa en considerar  $\phi = \exp(-\alpha)$  y tomar una aproximación de Taylor de primer orden para obtener  $(1-\phi)$ , es decir  $\exp(-\alpha) = 1 - \alpha + O(\alpha^2)$ . Este último elemento no constituye la principal diferencia del modelo con respecto a su versión de tiempo continuo, aunque para muchos casos los factores obtenidos de la versión discreta difieren de su equivalente continuo. Pese a lo anterior, el ajuste global del modelo es independiente de su especificación continua o discreta.

Un elemento diferenciador entre la versión continua y discreta es que la tasa corta en la versión discreta corresponde a  $n = 1$ , por lo que en general consideraremos que la tasa a 1 mes es la más corta de la economía. Es fácil notar que cuando  $n = 1$ , dicha tasa es la suma de los dos primeros factores al igual que el modelo de tiempo continuo, lo que se logra a través de reducir el exponente del segundo componente que acompaña al tercer factor. Finalmente, en el caso de la tasa larga, es fácil notar que ella corresponde al primer factor debido a que los otros elementos convergen a cero cuando  $n$  es grande.

#### 1. Derivación Teórica

Como discutimos arriba el modelo DNS en tiempo discreto puede ser obtenido a través de la dinámica de los factores involucrados. Para ello consideraremos que dos supuestos

básicos. Primero la tasa corta es función de los dos primeros factores dinámicos:  $z_{1t} = \lambda_{1t} + \lambda_{2t}$ . Esto se encuentra alineado con la discusión anterior por lo que se enmarca directamente con los resultados del modelo. El segundo supuesto contiene elementos más teóricos y corresponde a que la tasa de madurez  $n$  es un promedio simple de las tasas cortas esperadas (Campbell, Lo y MacKinlay, 1997):

$$z_{nt} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} E_t(z_{1t+i}). \quad (3)$$

Esto corresponde a la Hipótesis de Expectativas en Logaritmos (HEL). Dicho resultado se basa en que una estrategia de largo plazo puede ser implementada a través de la compra de un bono largo o comprando sucesivamente bonos cortos. Debido a que las rentabilidades de los bonos cortos no son conocidas al inicio de la decisión de inversión se consideran valores esperados. La equivalencia entre ambas inversiones corresponde a que no existe arbitraje entre dichas combinaciones de activos. Es importante notar que esto es cierto si el inversionista es capaz de eliminar el riesgo del portafolio a través de una cobertura dinámica.

Proposición 1: Para obtener el modelo DNS requerimos asumir ciertas dinámicas de los factores. En particular el nivel, o primer factor, debe ser una caminata aleatoria:  $\lambda_{1t} = \lambda_{1t-1} + e_{1t}$ , mientras que el segundo factor, denominado negativo de la pendiente, debe ser estacionario con tendencia estocástica, esto es  $\lambda_{2t} = \phi\lambda_{2t-1} + (1-\phi)\lambda_{3t-1} + e_{2t}$  con  $\lambda_{3t} = \phi\lambda_{3t-1} + e_{3t}$ .

Prueba: Véase sección 1 del Anexo.

Notamos que el tercer factor no observado en la tasa corta contemporánea puede ser interpretado como una variable latente. En particular, observamos que dicho factor corresponde a la tendencia estocástica del segundo factor el cual corresponde a la pendiente de la curva. En otras palabras dicho factor permite el ajuste de las perspectivas futuras de la economía.

## 2. Implicancias de Series de Tiempo

En la sección anterior presentamos que el modelo DNS puede ser entendido como un modelo de factores. Es interesante observar que debido a que la tasa corta es el argumento principal para determinar la curva de rendimiento (a través de la HEL), entonces es posible establecer cual es el proceso ARIMA que la define. Notamos que es ARIMA debido a que uno de los factores es caminata aleatoria.

Proposición 2: El modelo DNS que resulta de la HEL implica que la tasas de madurez finita puede ser modelada con un ARIMA(2,1,2). Las raíces del polinomio AR estacionario son iguales, mientras que los signos de los coeficientes de la componente MA dependen de la madurez de la tasa. En particular, la tasa corta tiene signos opuestos (negativo el primer rezago y positivo el segundo).

Prueba: Véase sección 1 del Anexo.

Los resultados de la proposición anterior pueden ser utilizados para validar si las restricciones que impone el modelo DNS son adecuadas para la dinámica de las tasas observadas en series de tiempo. Del mismo modo, la estimación de un modelo ARIMA(2,1,2) permite la identificación del parámetro  $\phi$  a través de las raíces del componente AR, mientras que los coeficientes del proceso MA y la varianza del error permiten la identificación de las volatilidades de los tres factores que supone el modelo. Esto último ocurre porque empíricamente el econometrista cuenta con los 2 coeficientes del proceso MA más la varianza estimada del error.

## 3. Implementación Empírica

En la práctica, y debido a la inexistencia de bonos cero para los tramos más largos de la curva, la implementación empírica del modelo Nelson-Siegel utiliza la TIR de un bono con madurez  $n, y_n$ , para calcular la duración  $D$ . En particular, la aproximación supone que  $y_n$  es equivalente a la tasa de un bono cero cupón cuya madurez es  $D$  ( $z_D$ ). La relación es evidente si la curva de rendimiento es plana, en cuyo caso la TIR del bono será equivalente a la única tasa que representa la curva. Para el caso de bonos de corta

madurez, en general la duración coincide con la madurez debido a que el pago del principal es relativamente más importante que los pagos de los cupones comprometidos. Por otra parte los bonos de madurez, el resultado se obtiene de una aproximación de primer orden del cambio porcentual del precio del bono.

Por otro lado, los instrumentos que se transan en un determinado momento pueden impactar en la estimación de la curva debido a que ellos, en general, se concentran en algunos tramos específicos. Los *benchmark's* son aproximaciones a puntos de la curva que tienen mayor profundidad por lo que podrían evitar sobre-ajustes a tramos que están muy transados y sub-ajustes a tramos de baja profundidad. La mayoría de los cálculos para *benchmark's* son mecánicos y no contienen supuestos sobre la curva. Por ejemplo el *benchmark* para un bono a 5 años podría incluir todos aquellos bonos que se transan en el período determinado y que tienen madurez entre 3.5 y 6 años.

Finalmente, notamos que el modelo presenta un parámetro no lineal ( $\phi$ ) el cual puede ser estimado en conjunto con los otros parámetros (Lefort y Walker, 2000), o puede ser calibrado *ex-ante*. Nelson y Siegel (1987) motivan el uso de un parámetro global que permita la estimación de los otros parámetros a través de una regresión lineal. En este artículo consideramos esta ruta para lo cual establecemos una grilla para encontrar el valor de  $\phi$ . El criterio de minimización corresponde a considerar la distribución del  $R^2$  para las regresiones de corte transversal y adicionalmente se compara el Error Absoluto Medio máximo obtenido para todo el período.

### **III. Evidencia Empírica para Chile**

En esta sección recopilamos la evidencia empírica en estimaciones de la curva de rendimiento para el caso de Chile. Entendemos que hay una literatura amplia de estimaciones de curva con polinomios que han sido utilizadas por analistas tanto para la interpolación como extrapolación de tasas de interés. Sin embargo, nuestro enfoque se enmarca dentro de las estimaciones que tienen un sustento teórico, el cual implica que el modelo asume cierto grado de sustitución entre las tasas cortas y largas. Posteriormente presentamos la estimación del modelo DNS en el cual nos proponemos encontrar el parámetro no lineal que minimiza una función de pérdida de los errores de estimación obtenidos en corte transversal para las curvas en pesos y UF's.



## 1. Revisión de la Literatura

Para Chile se han realizado varios estudios que intentan modelar la estructura de tasas de interés a través de distintos métodos. Uno de los primeros trabajos corresponde al desarrollado por Herrera y Magendzo (1997) quienes utilizan los PRC (Pagarés Reajustables con Cupones del Banco Central de Chile) para estimar el modelo de Nelson y Siegel (1987) por mínimos cuadrados no lineales utilizando información tanto de las licitaciones de estos instrumentos como de las transacciones del mercado secundario obtenidas de la Bolsa de Comercio. Su metodología consiste en encontrar los factores de descuento que minimizan la distancia entre el precio observado del bono y el estimado. Ellos presentan resultados para las tasas reales entre marzo y junio del 1996, encontrando que, en promedio la curva de rendimiento tiene pendiente positiva, existiendo un premio positivo para los pagarés a mayores plazos, específicamente se encuentra un *spread* entre los PRBC a 90 días y los PRC a 8 años de 26%. Bajo la misma metodología Zúñiga y Soria (1999) estiman empíricamente la estructura temporal de tasas de interés para el periodo comprendido entre 1994 y 1997 utilizando los bonos de reconocimiento y los pagarés reajustables del Banco Central de Chile (bonos cero cupón) transados en la Bolsa de Comercio. Agregando la información diaria en un promedio mensual, estiman la curva de rendimiento obteniendo 48 estimaciones de los parámetros que permiten construir las curvas *spot* y *forward* donde la curva *spot* es siempre descendente.

Por otro lado, Parisi (1998), utilizando los instrumentos nominales como los Pagarés Descontables del Banco Central de Chile para el período comprendido entre 1983 y 1995, estima por GMM una curva de modelos afines para la tasa de interés de corto plazo derivado de los modelos de Vasicek (1977) y Cox, Ingersoll y Ross (1985). Esta modelación corresponde a la estimación de un factor posiblemente no homocedástico y se basa en la investigación empírica de Chan *et al.* (1992). Zúñiga (1999), usando Máxima Verosimilitud, extiende este análisis para considerar modelos de varianza condicional del tipo GARCH, mientras que Fernández (1999) presenta una estimación, utilizando la tasa promedio de depósitos interbancarios como una aproximación de los PBDC's, a través de métodos no paramétricos.

Lefort y Walker (2000) caracterizan la estructura de tasas de interés reales y sus cambios a través del tiempo en intervalos de 15 días para el período comprendido entre

1992 y 1998. Se utiliza información diaria para obtener estimaciones a mitad y fin de mes incluyendo datos del mercado secundario, primario, bonos de reconocimiento, PRBC y PRC. Estimando Nelson y Siegel encuentran un buen grado de ajuste para la curva de rendimiento y un parámetro no lineal  $\alpha$  relativamente bajo, lo que implica un  $\phi$  cercano a uno y por tanto una fuerte persistencia de los factores estacionarios.

Alfaro (2003) propone una variación en la estimación del modelo Nelson y Siegel implementado por Herrera y Magendzo (1997), permitiendo un ajuste en las tasas de descuento en sustitución de los precios de los bonos. Esta modificación implica asumir que el retorno de un bono con cupones de madurez  $n$  similar al obtenido por un bono de descuento con madurez igual a la duración del bono con cupones. Adicionalmente se agregan a la estimación de la curva los nuevos instrumentos emitidos por la autoridad monetaria BCP's y BCU's (Bonos del Banco Central de Chile en pesos y en Unidades de Fomento).

Una segunda ola de trabajos de curvas afines se inicia con Ochoa (2006) quien extiende el modelo de Vasicek (1977) con un componente no observado siguiendo a Balduzzi *et al.* (1998) mientras Cortázar *et al.* (2007) utilizan de manera comercial un modelo de 3 factores para la estimación de la curva de rendimiento tanto de bonos de gobierno como de empresas. En ambos casos, las estimaciones minimizan las diferencias en los precios de los instrumentos las cuales son realizadas utilizando el filtro de Kalman para considerar el factor no observado (Ochoa, 2006) o para solucionar el tema de transacciones infrecuentes (Cortazar *et al.*, 2007). Morales (2007), utilizando tasas de interés reajustables, explora la motivación de Diebold y Li (2006) al considerar el modelo dinámico de Nelson y Siegel y su relación con factores macroeconómicos en un ambiente tipo VAR. El autor muestra que el algoritmo simplificado de 2 etapas propuesto por Diebold y Li (2006), el cual implica calibrar el parámetro no lineal y realizar estimaciones lineales, no genera mayores diferencias que la estimación con filtro de Kalman.

Recientemente Alfaro (2009) propone una versión discreta del modelo Dinámico de Nelson y Siegel, y siguiendo a Campbell, Lo y MacKinlay (1997), demuestra que el modelo pertenece a la clase de los modelos “afines” entregando una prueba alternativa a la presentada por Christensen, Diebold y Rudebusch (2009), dado que utiliza la

ecuación de Euler para mostrar que el rendimiento de un bono es lineal en tres factores y, al igual que en Balduzzi, Das y Foresi (1998), uno de estos factores es inobservable, mientras que los observables son asociados con la tasa de interés de largo plazo y el premio por plazo.

## 2. Calibración del modelo DNS

Los ejercicios presentados acá cubren tanto la estructura de tasas de interés nominal como la real. Los datos utilizados para la construcción de la curva nominal corresponden a las tasas de captación prime a 1, 3, 6 y 12 meses y los bonos nominales (BCP's) emitidos por el Banco Central de Chile a 2, 5 y 10 años. Para la estimación de la curva real, se utilizó la tasa de captación prime a 12 meses y los bonos reajustables (BCU's) emitidos por el Banco central de Chile a 2, 5, 10 y 20 años. Los datos son de frecuencia mensual y se construyen como un promedio simple de las observaciones diarias en cada mes para el período enero 2005 a abril 2010. De este modo, cada “corte transversal” corresponde a la estimación mensual de la curva.

Esta estimación presenta una dificultad adicional. Dado que tanto los BCP's como los BCU's tienen cupones se debe descontar y “limpiar” cada instrumento de este efecto y así obtener una correcta caracterización de la estructura de tasas de interés. Para corregir el efecto cupón se estima la duración considerando la tasa cupón, la madurez y la tasa de rendimiento de cada instrumento que compone el *benchmark*. Así la duración propiamente tal es un promedio ponderado la duración de todos los bonos que componen el *benchmark*.

Con todo, se estima para cada mes la ecuación (2) por mínimos cuadrados ordinarios utilizando un sencillo procedimiento de grilla sobre el parámetro no lineal que abarca desde  $\phi=0.05$  a  $\phi=0.95$  en intervalos de 0.05. En base a esto se obtienen la media, la mediana y la desviación estándar (D.E.) de los factores estimados en cada mes. Como se observa, tanto para  $\lambda_{1t}$  y  $\lambda_{3t}$  la desviación estándar tiende a disminuir y el promedio a aumentar a medida que se incrementa  $\phi$ . Mientras que para  $\lambda_{2t}$  la desviación tiende a aumentar y el promedio a decrecer a medida que  $\phi$  se aproxima a uno (Tabla 1).

Tabla 1: Descriptiva de los Factores del modelo DNS (Chile, pesos)

$\phi$	$\lambda_1$			$\lambda_2$			$\lambda_3$		
	Media	Mediana	D.E.	Media	Mediana	D.E.	Media	Mediana	D.E.
0.05	5.75	5.79	1.03	-1.17	-0.99	1.52	-2.02	-1.17	4.11
0.10	5.75	5.79	1.03	-1.17	-0.99	1.52	-1.90	-1.07	3.92
0.15	5.76	5.79	1.02	-1.18	-1.00	1.53	-1.81	-1.00	3.78
0.20	5.76	5.79	1.00	-1.19	-1.00	1.55	-1.73	-0.94	3.69
0.25	5.78	5.80	0.99	-1.19	-1.01	1.57	-1.67	-0.88	3.62
0.30	5.79	5.80	0.97	-1.20	-1.01	1.59	-1.62	-0.83	3.59
0.35	5.80	5.80	0.95	-1.22	-1.02	1.61	-1.57	-0.78	3.58
0.40	5.82	5.81	0.92	-1.23	-1.03	1.65	-1.53	-0.73	3.58
0.45	5.84	5.81	0.89	-1.25	-1.04	1.68	-1.49	-0.68	3.60
0.50	5.86	5.81	0.86	-1.27	-1.05	1.73	-1.45	-0.62	3.63
0.55	5.89	5.89	0.82	-1.29	-1.06	1.78	-1.42	-0.56	3.67
0.60	5.92	5.88	0.78	-1.32	-1.07	1.85	-1.37	-0.50	3.70
0.65	5.96	6.03	0.74	-1.35	-1.09	1.93	-1.33	-0.41	3.74
0.70	6.00	6.12	0.70	-1.39	-1.10	2.04	-1.27	-0.32	3.75
0.75	6.06	6.11	0.67	-1.44	-1.12	2.17	-1.21	-0.18	3.72
0.80	6.13	6.13	0.65	-1.51	-1.13	2.34	-1.12	-0.02	3.59
0.85	6.23	6.19	0.67	-1.60	-1.15	2.56	-0.99	0.11	3.33
0.90	6.39	6.25	0.79	-1.75	-1.13	2.88	-0.78	0.37	2.89
0.95	6.67	6.17	1.22	-2.01	-0.87	3.48	-0.18	0.42	2.41

Por otro lado, los resultados revelan que para las distintas estimaciones mensuales de la curva de rendimiento, la mediana del R2 y su rango intercuartil (IQR), obtenidos para cada una de las estimaciones mensuales, son crecientes en el parámetro no lineal, aunque en el margen ( $\phi=0.95$ ) tiende a caer marginalmente. La dispersión (IQR) presenta una tendencia decreciente hasta valores de 0.8 y posteriormente se aumenta en la cola de la grilla (Figura 1). Finalmente, tomando el número de veces que el  $p$ -value del  $test F$  es superior a 5% y 10% con las distintas combinaciones de  $\phi$ , observamos que a medida que aumenta  $\phi$  el número de veces que el  $test F$  es no significativo tiende a disminuir hasta  $\phi=0.75$  para luego volver a aumentar (Figura 2).

Figura 1: Mediana y Rango Inter cuartil  $R^2$  de cada regresión

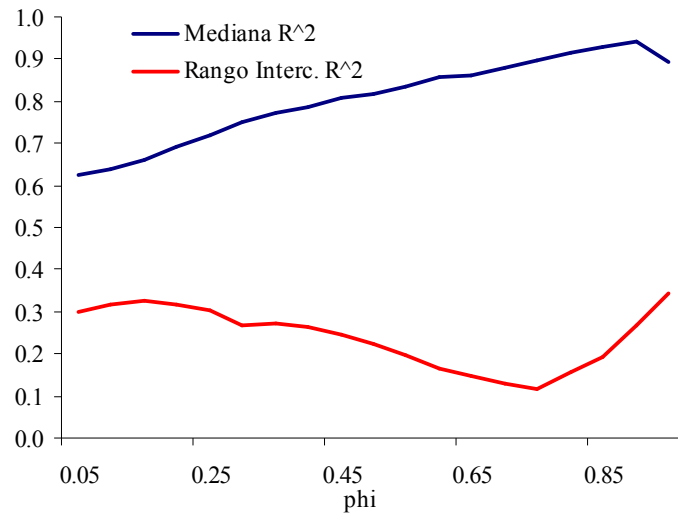
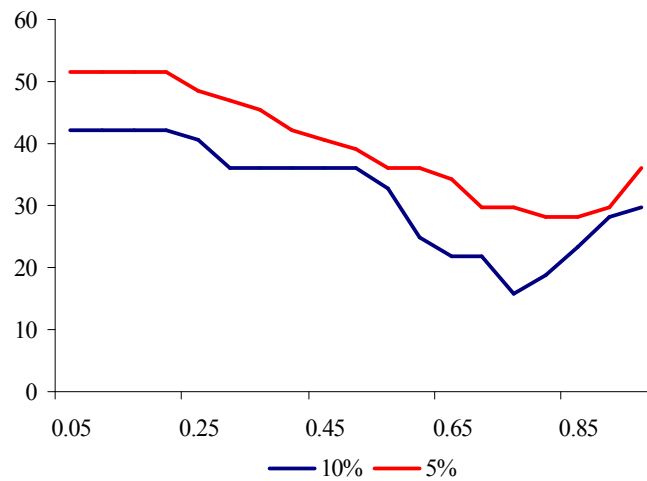


Figura 2: Número de veces que el test F no es significativo



A fin de considerar si el modelo se ajusta adecuadamente al mercado chileno consideramos puntos profundos de la curva. Con ellos se estimaron los errores absolutos máximos y medios para cada uno. Los resultados indican bajo  $\phi=0.90$  se minimiza el error de ajuste promedio (Tabla 2).

Tabla 2: Error Absoluto Medio Máximo por Madurez y Valor de  $\phi$

$\phi$	Madurez						<b>Promedio</b>
	1	3	6	24	60	120	
0.05	1.22	0.98	1.23	1.61	1.02	2.12	1.36
0.10	1.22	0.98	1.20	1.61	1.01	2.11	1.35
0.15	1.22	0.99	1.14	1.62	0.98	2.08	1.34
0.20	1.22	1.00	1.07	1.63	0.96	2.05	1.32
0.25	1.22	1.01	0.98	1.64	0.92	2.01	1.30
0.30	1.21	1.01	0.87	1.66	0.88	1.96	1.27
0.35	1.21	1.01	0.74	1.67	0.83	1.90	1.23
0.40	1.21	1.01	0.60	1.68	0.77	1.84	1.18
0.45	1.20	1.00	0.44	1.69	0.70	1.76	1.13
0.50	1.19	0.98	0.27	1.70	0.63	1.67	1.07
0.55	1.18	0.94	0.11	1.70	0.55	1.56	1.01
0.60	1.16	0.88	0.23	1.68	0.45	1.44	0.97
0.65	1.14	0.80	0.38	1.64	0.35	1.29	0.93
0.70	1.10	0.70	0.50	1.55	0.24	1.11	0.87
0.75	1.06	0.59	0.56	1.41	0.23	0.91	0.79
0.80	1.01	0.58	0.55	1.17	0.27	0.69	0.71
0.85	0.95	0.61	0.44	1.19	0.27	0.47	0.65
0.90	0.89	0.61	0.54	1.27	0.21	0.41	0.65
0.95	0.85	0.58	0.73	1.10	0.37	0.32	0.66

Para el caso de las estructura de tasa de interés reajustables se observa que los factores  $\lambda_{1t}$  y  $\lambda_{2t}$  presentan resultados mucho más estables que en el caso nominal. Desde  $\phi=0.05$  a  $\phi=0.75$   $\lambda_{1t}$  y  $\lambda_{2t}$  se mantienen constantes y cruzando ese umbral tienden a aumentar su dispersión y a aumentar y disminuir sus promedios respectivamente. Para el caso de  $\lambda_{3t}$ , este tiende a crecer rápidamente a medida que se incrementa  $\phi$  y su desviación estándar disminuye (Tabla 3)

Tabla 3: Descriptiva de los Factores del modelo DNS (Chile, UF)

$\phi$	$\lambda_1$			$\lambda_2$			$\lambda_3$		
	Media	Mediana	D.E.	Media	Mediana	D.E.	Media	Mediana	D.E.
0.05	3.31	3.29	0.38	-0.96	-0.85	1.42	-24.0	-20.3	23.5
0.10	3.31	3.29	0.38	-0.96	-0.85	1.42	-22.7	-19.2	22.2
0.15	3.31	3.29	0.38	-0.96	-0.85	1.42	-21.4	-18.1	20.9
0.20	3.31	3.29	0.38	-0.96	-0.85	1.42	-20.1	-17.0	19.6
0.25	3.31	3.29	0.38	-0.96	-0.85	1.42	-18.7	-15.8	18.3
0.30	3.31	3.29	0.38	-0.96	-0.85	1.42	-17.4	-14.7	17.0
0.35	3.31	3.29	0.38	-0.96	-0.85	1.42	-16.1	-13.6	15.6
0.40	3.31	3.29	0.38	-0.96	-0.85	1.42	-14.8	-12.5	14.3
0.45	3.31	3.29	0.38	-0.96	-0.85	1.42	-13.5	-11.4	13.0
0.50	3.31	3.29	0.38	-0.96	-0.85	1.42	-12.2	-10.2	11.7
0.55	3.31	3.29	0.38	-0.96	-0.85	1.42	-10.9	-9.11	10.4
0.60	3.31	3.29	0.38	-0.96	-0.85	1.42	-9.55	-7.99	9.11
0.65	3.31	3.29	0.38	-0.96	-0.85	1.42	-8.24	-6.88	7.80
0.70	3.31	3.29	0.38	-0.96	-0.85	1.42	-6.94	-5.77	6.50
0.75	3.31	3.29	0.38	-0.96	-0.85	1.42	-5.66	-4.70	5.23
0.80	3.32	3.30	0.39	-0.97	-0.86	1.43	-4.46	-3.69	4.01
0.85	3.34	3.32	0.40	-1.00	-0.88	1.45	-3.40	-2.81	2.91
0.90	3.42	3.38	0.44	-1.07	-0.94	1.49	-2.58	-2.12	1.93
0.95	3.69	3.62	0.52	-1.34	-1.18	1.60	-2.03	-1.83	1.00

Los resultados para el R2 mediano y su rango intercuartil (IQR) obtenidos para cada una de las estimaciones mensuales indican que el valor mediano del R2 es estable y creciente en el parámetro no lineal y tiende a aumentar en el margen. La dispersión (IQR) también es estable y presenta una tendencia decreciente desde los valores de 0.8. (Figura 3).

Por otra parte del número de veces que el  $p$ -value del  $test F$  es superior a 5% y 10% con las distintas combinaciones de  $\phi$  se puede observar que el número de veces que la significancia global de la regresión estimada no es significativa se mantiene prácticamente constante hasta  $\phi=0.75$  y tiende a decaer con fuerza para valores de  $\phi$  más cercanos a 1 (Figura 4).

Figura 3: Mediana y Rango Intercuartil  $R^2$  de cada regresión

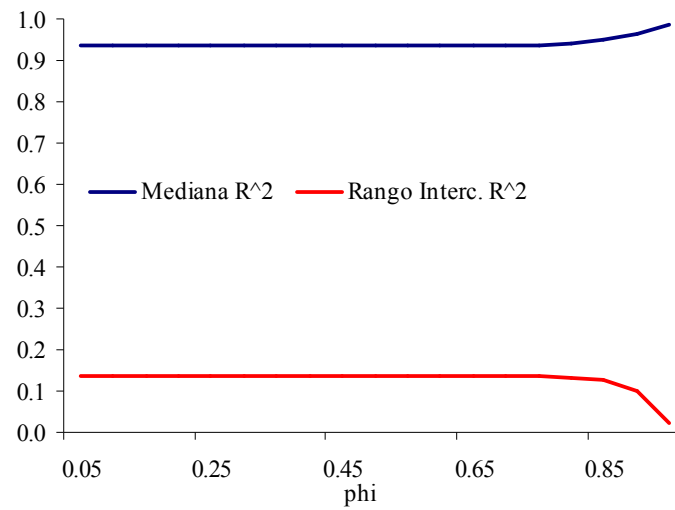
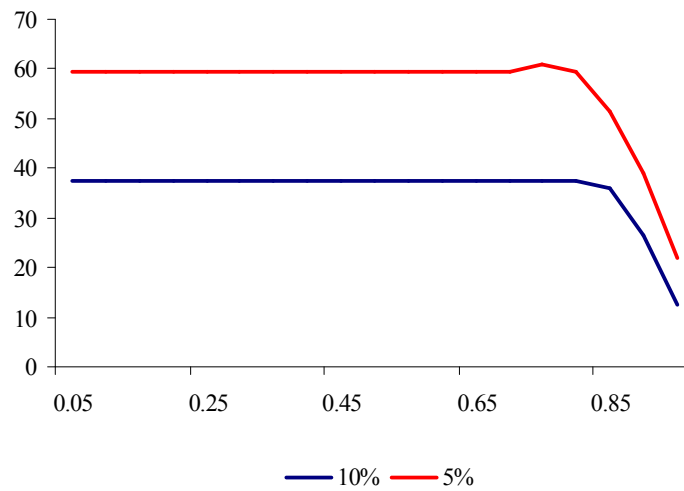


Figura 4: Número de veces que el test F no es significativo



A fin de considerar el grado de ajuste que se obtiene para la curva de rendimiento reajutable con estos factores estimados se aprecia que al igual que en el caso nominal, el mejor ajuste se produce con  $\phi = 0.95$  (Tabla 4).



Tabla 4: Error Absoluto Medio Máximo por Madurez y Valor de  $\phi$

$\phi$	Madurez						<b>Promedio</b>
	1	3	6	24	60	120	
0.05	0.05	3.70	1.69	0.34	0.24	0.27	1.25
0.10	0.10	3.70	1.69	0.34	0.24	0.27	1.25
0.15	0.15	3.70	1.69	0.34	0.24	0.27	1.25
0.20	0.20	3.70	1.69	0.34	0.24	0.27	1.25
0.25	0.25	3.70	1.69	0.34	0.24	0.27	1.25
0.30	0.30	3.70	1.69	0.34	0.24	0.27	1.25
0.35	0.35	3.69	1.69	0.34	0.24	0.27	1.25
0.40	0.40	3.69	1.69	0.34	0.24	0.27	1.25
0.45	0.45	3.69	1.69	0.34	0.24	0.27	1.25
0.50	0.50	3.67	1.69	0.34	0.24	0.27	1.24
0.55	0.55	3.64	1.69	0.34	0.24	0.27	1.24
0.60	0.60	3.56	1.69	0.34	0.24	0.27	1.22
0.65	0.65	3.41	1.69	0.34	0.24	0.27	1.19
0.70	0.70	3.14	1.69	0.34	0.24	0.27	1.14
0.75	0.75	2.71	1.69	0.34	0.24	0.27	1.05
0.80	0.80	2.09	1.68	0.34	0.24	0.27	0.92
0.85	0.85	1.33	1.63	0.33	0.24	0.25	0.76
0.90	0.90	1.16	1.51	0.30	0.23	0.20	0.68
0.95	0.95	1.14	1.31	0.29	0.15	0.15	0.60

#### IV. Evidencia Empírica para EEUU

En esta sección presentamos la implementación del modelo DNS para el caso de EEUU. Al igual que en el caso de Chile, realizamos estimaciones de corte transversal con diferentes valores para el parámetro no lineal  $\phi$ , a fin de determinar cual valor puntual permite el mejor ajuste global. Debido a que se cuenta con una muestra extensa en series de tiempo es posible evaluar los resultados de la Proposición 2, los resultados indican que si bien las tasas presentan raíces unitarias la modelación de su diferencias se ajustan a distintos procesos ARMA's. En el caso que de tener un componente AR(2) las raíces resultan ser estadísticamente distintas.

##### 1. Revisión de la literatura

Para el caso de Estados Unidos existe una amplia literatura que intenta modelar la estructura de tasas de interés mediante diversos métodos, sin embargo, es posible distinguir dos corrientes tradicionales: los modelos de no arbitraje y los modelos de equilibrio. Bajo la primera corriente, los estudios relacionados se focalizan en ajustar la estructura de tasas, empleando datos de corte transversal, para asegurar la inexistencia

de posibilidades de arbitraje, aspecto que es importante para la valoración de opciones. En esta línea, Hull y White (1990) extienden el modelo de un factor de Vasicek (1977) y Cox, Ingersoll y Ross (1985) para la tasa de interés *spot* de Estados Unidos en donde el analista puede especificar la volatilidad de esta tasa, o bien, la volatilidad de la tasa *forward*, y muestran que ambos modelos son consistentes con la estructura de tasas y la volatilidad de todas las tasas de interés –*spot* y *forward*– para dicha economía. Heath, Jarrow y Morton (1992), por su parte, generalizan el modelo de Ho y Lee (1986) en tiempo continuo y múltiples factores tomando como dada la curva *forward* inicial de Estados Unidos e imponiendo un proceso estocástico exógeno para su evolución en el tiempo. Los autores muestran que la condición de no arbitraje restringe esta familia de procesos y entrega una fórmula para la valuación de la tasa de interés de bonos contingentes, la cual no depende explícitamente del precio de mercado del riesgo.

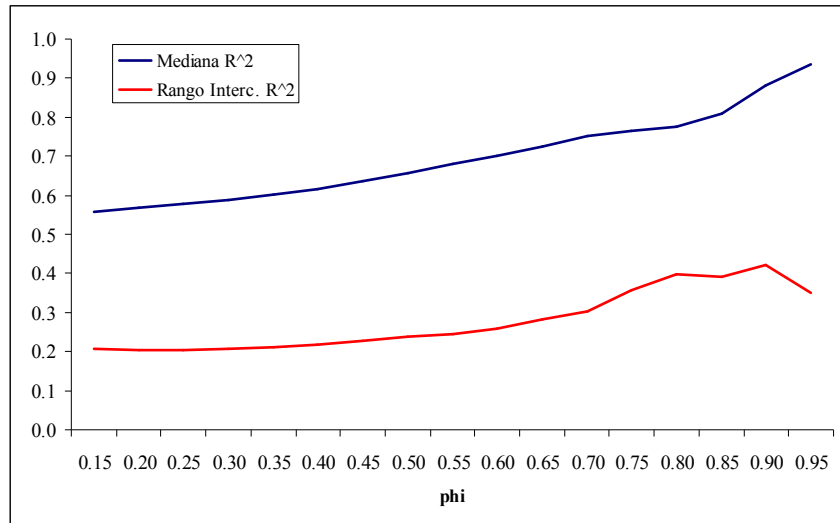
Bajo la corriente de modelos de equilibrio, los estudios empíricos relacionados se focalizan en modelar la dinámica de las tasas de interés instantáneas mediante modelos afines, típicamente como un sistema cointegrado con una tendencia estocástica dada por la tasa corta y *spreads* estacionarios relativos a la tasa corta. Vasicek (1977); Cox, Ingersoll y Ross (1985); Diebold y Sharpe (1990); Hall, Anderson y Granger (1992); Shea (1992); Swanson y White (1995); Pagan, Hall y Martin (1996); Duffie y Kan (1996); y Diebold y Li (2007) son algunos ejemplos.

## 2. Calibración del modelo DNS

Para el caso de EEUU, se consideró la información de *benchmark's* publicada por el Tesoro Americano para bonos a 1, 3 y 6 meses, y 1, 2, 3, 5, 7, 10, 20 y 30 años en frecuencia diaria para el período febrero de 2006 a marzo de 2010. Al igual que en el caso anterior, cada “corte transversal” corresponde a la estimación mensual de la curva. Con el fin de estimar la duración de cada uno de los bonos con cupones se asumió que el bono se transaba a su valor par. De esta forma no es necesario contar con la información de la tasa de cupón de cada uno de los bonos para realizar el cálculo de la duración. Finalmente, por simplicidad se consideró la duración ( $n$ ) expresada en meses. De esta forma, la tasa más corta del modelo corresponde a la de un mes.

Los resultados para la mediana del  $R^2$  y su rango intercuartil (IQR) obtenidos para cada una de las estimaciones mensuales indican que el  $R^2$  mediano es creciente en el parámetro no lineal  $\phi$ . La dispersión, medida por el IQR, presenta una tendencia creciente hasta valores de 0.8 y posteriormente se estabiliza para disminuir en la cola de la grilla (Figura 5).

Figura 5: Parámetro  $\phi$  y Coeficiente de Ajuste  $R^2$  Mediano



Dependiendo de la función de pérdida utilizada el analista puede considerar un valor del parámetro no lineal que minimice tal criterio. Diebold y Li (2006) establecen que el valor óptimo de  $\phi$  en tiempo continuo tiene un equivalente en esta presentación del modelo (discreta) a 0.94, lo cual es consistente con los resultados presentados arriba.

A fin de considerar si el modelo se ajusta adecuadamente al mercado consideramos una lista de tramos más profundos. Con ellos se estimaron los errores absolutos medios para cada uno de estos tramos y se consideró el valor máximo obtenido en la muestra total. Los resultados indican que bajo  $\phi = 0.95$  el promedio de estos indicadores se minimiza para los tramos considerados (Tabla 5). Este resultado puede ser analizado por partes al considerar cuales son los ajustes de los extremos de la curva (factores 1 y 2), y la forma como los tramos medios (factor 3) se comportan. De esta forma, notamos que el nivel de la tasa, el cual corresponde al factor 1 y puede ser estudiado mediante la tasa más larga disponible, presenta un error considerablemente bajo al tomar  $\phi = 0.95$ . Al tomar

este valor, las pérdidas en las tasas cortas (1, 3 y 6 meses) son relativamente pequeñas bajo esta medida. Las tasas más largas, por otra parte, presentan valores relativamente cercanos a su óptimo.

Tabla 5: Error Absoluto Medio Máximo por Madurez y Valor de  $\phi$

$\phi$	Madurez						Promedio
	1	3	6	24	60	120	
0.05	0.0083	0.0090	0.0115	0.0132	0.0047	0.0154	<b>0.0103</b>
0.10	0.0082	0.0089	0.0114	0.0133	0.0046	0.0153	<b>0.0103</b>
0.15	0.0082	0.0089	0.0112	0.0133	0.0045	0.0152	<b>0.0102</b>
0.20	0.0082	0.0090	0.0109	0.0133	0.0044	0.0151	<b>0.0102</b>
0.25	0.0083	0.0090	0.0106	0.0134	0.0044	0.0149	<b>0.0101</b>
0.30	0.0083	0.0091	0.0103	0.0134	0.0045	0.0147	<b>0.0100</b>
0.35	0.0083	0.0092	0.0099	0.0135	0.0047	0.0144	<b>0.0100</b>
0.40	0.0084	0.0093	0.0095	0.0135	0.0048	0.0142	<b>0.0099</b>
0.45	0.0084	0.0094	0.0090	0.0135	0.0050	0.0139	<b>0.0099</b>
0.50	0.0084	0.0096	0.0085	0.0134	0.0052	0.0136	<b>0.0098</b>
0.55	0.0085	0.0098	0.0081	0.0133	0.0053	0.0134	<b>0.0097</b>
0.60	0.0085	0.0100	0.0076	0.0130	0.0055	0.0131	<b>0.0096</b>
0.65	0.0086	0.0102	0.0072	0.0126	0.0057	0.0127	<b>0.0095</b>
0.70	0.0087	0.0104	0.0072	0.0119	0.0060	0.0123	<b>0.0094</b>
0.75	0.0089	0.0106	0.0079	0.0108	0.0063	0.0116	<b>0.0093</b>
0.80	0.0092	0.0107	0.0087	0.0090	0.0067	0.0106	<b>0.0092</b>
0.85	0.0096	0.0109	0.0094	0.0075	0.0070	0.0092	<b>0.0089</b>
0.90	0.0098	0.0111	0.0095	0.0059	0.0069	0.0075	<b>0.0084</b>
0.95	0.0099	0.0114	0.0090	0.0047	0.0054	0.0056	<b>0.0077</b>

### 3. Dinámica de las tasas

Finalmente, y como una forma de verificar las restricciones impuestas por el modelo Nelson-Siegel sobre las tasas de EEUU, se consideró una modelación ARMA para los *benchmark's* más profundos. Los test de raíces unitarias realizados sobre el nivel y primeras diferencias indican que dichos *benchmark's* son integrados de orden 1 (Tablas 6 y 7), lo que de acuerdo a la Proposición 2 implica que el modelo Nelson-Siegel impone una componente AR(2) para la dinámica observada en las primeras diferencias de las tasas de EEUU, mientras que los coeficientes de la componente MA identificarían las volatilidades de los factores supuestos por el modelo.

Tabla 6: Test de Raíces Unitarias Tasas de EEUU  
(*p-values* nivel)

<i>Benchmark</i>	Dickey – Fuller			Phillips – Perron	
	Constante	Tendencia	Drift	Constante	Tendencia
3 meses	0.385	0.834	0.037	0.242	0.644
1 año	0.463	0.787	0.051	0.282	0.614
3 años	0.520	0.846	0.064	0.365	0.727
5 años	0.524	0.865	0.065	0.384	0.765
10 años	0.531	0.891	0.067	0.426	0.823
20 años	0.618	0.933	0.093	0.540	0.894
30 años	0.779	0.216	0.177	0.683	0.129

Tabla 7: Test de Raíces Unitarias Tasas de EEUU  
(*p-values* primeras diferencias)

<i>Benchmark</i>	Dickey – Fuller			Phillips – Perron	
	Constante	Tendencia	Drift	Constante	Tendencia
3 meses	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1 año	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3 años	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5 años	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
10 años	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
20 años	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
30 años	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Los criterios de información de Akaike (AIC) y Schwarz (BIC) obtenidos del ajuste de modelos ARMA para los *benchmark's* de EEUU se muestran en la Tabla 8. A partir de estos resultados notamos que ambos criterios favorecen, en alguna medida, la componente AR(2) para gran parte de las tasas más profundas de EEUU. En particular, el criterio AIC respaldaría los supuestos que impone el modelo Nelson-Siegel sobre los factores dinámicos del modelo para los *benchmark's* de bonos a 3 meses y 1, 5 y 30 años, mientras que el criterio BIC lo haría sólo para los *benchmark's* a tramos algo más cortos (3 meses, 1 y 5 años), debido probablemente, a que por construcción el criterio BIC tiende a elegir modelos más parsimoniosos. Para las tasas a 3, 10 y 20 años, los criterios de información antes mencionados favorecerían componentes AR de acuerdo a la construcción de ambos estadígrafos: AIC señala la componente AR(3) o AR(4) como

favorita (menos parsimoniosos), mientras que BIC se inclina más bien por la componente más parsimoniosa AR(1).

Tabla 8: Criterios de Información Modelos ARMA para Tasas de EEUU  
AIC / (BIC)

$(p, q)$	Tasas						
	3 meses	1 año	3 años	5 años	10 años	20 años	30 años
(1,1)	693.54	661.32	437.79	277.23	83.94	-43.07	113.38
	(712.82)	(679.43)	<b>(455.91)</b>	<b>(295.34)</b>	<b>(102.05)</b>	<b>(-25.47)</b>	<b>(128.82)</b>
(1,2)	693.47	658.78	436.96	276.60	84.45	-42.36	114.91
	(717.56)	(681.42)	<b>(459.60)</b>	(299.24)	<b>(107.09)</b>	<b>(-20.36)</b>	<b>(134.20)</b>
(1,3)	695.44	664.02	438.88	278.58	86.45	-40.41	116.88
	(724.36)	(691.19)	(466.05)	(305.75)	(113.62)	(-14.01)	(140.03)
(1,4)	672.58	637.00	436.55	278.59	88.13	-38.96	118.82
	(706.31)	(668.70)	(468.25)	(310.28)	(119.82)	(-8.16)	(145.82)
(2,1)	697.13	661.18	438.81	278.06	84.90	-42.14	114.95
	(721.22)	(683.82)	(461.45)	(300.70)	(107.54)	(-20.14)	(134.24)
(2,2)	695.41	663.81	438.85	278.58	86.45	-40.47	116.86
	(724.33)	(690.98)	(466.02)	(305.74)	(113.62)	(-14.07)	(140.01)
(2,3)	662.03	653.04	433.97	<b>264.27</b>	82.38	-45.78	<b>110.83</b>
	(695.76)	(684.74)	(465.67)	<b>(291.44)</b>	(114.08)	(-14.98)	(137.84)
(2,4)	<b>656.18</b>	<b>604.79</b>	426.33	272.37	79.92	-41.96	<b>112.97</b>
	<b>(694.73)</b>	<b>(641.02)</b>	(462.56)	(308.59)	(116.15)	(-6.76)	(139.98)
(3,1)	684.66	655.19	437.56	277.64	85.97	-41.23	116.74
	(713.57)	(682.35)	(464.73)	(304.81)	(113.13)	(-14.83)	(139.89)
(3,2)	685.56	655.45	439.21	279.50	87.96	-38.54	118.94
	(719.29)	(687.14)	(470.90)	(311.20)	(119.65)	(-7.74)	(145.95)
(3,3)	656.40	609.31	432.60	273.63	<b>81.47</b>	<b>-46.14</b>	113.47
	(694.95)	(645.53)	(468.83)	(309.85)	(117.70)	(-10.94)	(140.48)
(3,4)	658.14	605.44	<b>423.61</b>	274.03	86.27	-43.47	115.25
	(701.51)	(646.19)	(464.37)	(314.79)	(127.02)	(-3.87)	(146.11)
(4,1)	684.41	653.18	438.77	279.31	87.93	-39.23	118.74
	(718.15)	(684.87)	(470.47)	(311.01)	(119.63)	(-8.43)	(145.74)
(4,2)	684.93	623.87	440.27	269.04	89.83	-38.56	120.52
	(723.48)	(660.09)	(476.49)	(305.27)	(126.06)	(-3.36)	(151.38)
(4,3)	<b>646.38</b>	<b>603.84</b>	442.11	<b>265.42</b>	86.26	<b>-44.14</b>	115.22
	<b>(689.75)</b>	<b>(644.60)</b>	(482.87)	(306.17)	(127.02)	(-4.54)	(146.09)
(4,4)	659.36	605.55	<b>414.57</b>	265.84	<b>75.41</b>	-42.46	115.79
	(707.55)	(650.83)	(459.85)	(311.12)	(120.69)	(1.54)	(154.37)

La Proposición 2 implica, además, que las raíces del polinomio AR estacionario (esto es, de las primeras diferencias de los *benchmark's*) deben ser iguales, lo que significa que los coeficientes de los modelos ARMA estimados deben cumplir con  $\phi_1^2 + 4\phi_2 = 0$  para que los datos respalden los supuestos del modelo Nelson-Siegel. Basados en los resultados anteriores tenemos que los modelos seleccionados por AIC para tasa a 3 meses y un año son ARMA(2,4). Al realizar el test de restricción de raíz única se obtienen *p-values* de 0.0012 y 0.000, lo que rechaza la proposición. Similar resultado se obtiene para las tasas a 5 y 30 años cuyos modelos ARMA(2,3) también rechazan la hipótesis de raíces iguales.

### Conclusiones

En este artículo presentamos la derivación del modelo DNS utilizando la Hipótesis de Expectativas en Logaritmos (HEL). Notamos que las diferencias con Alfaro (2009) radican en los términos de Jensen los cuales no aparecen bajo HEL. Por otra parte, el uso de la HEL implica que la tasa corta es el único canal que entrega la dinámica a la curva de rendimiento. De esta forma, pese a contar con 3 factores, es posible resumir la curva de rendimiento bajo la dinámica de la tasa corta. En una proposición mostramos que el modelo DNS implica que las tasas de madurez finita pueden ser modeladas como un ARIMA(2,1,2), lo que puede ser explotado para la validación empírica del modelo.

Los resultados empíricos para Chile y EEUU permiten resolver el parámetro no lineal a través de la búsqueda por grilla. Al igual que Morales (2008) y Diebold y Li (2006) los resultados son consistentes con asignar a dicho parámetro un valor de 0.95. Dado este resultado la extensión natural de este trabajo es la búsqueda de dichos valores para otros mercados de renta fija. Adicionalmente, corroboramos para el caso de EEUU los resultados de la Proposición 2, encontrando que los modelos ARMA elegidos por los criterios de información tradicionales Akaike y Schwarz, distan de ser ARMA(2,2) como lo establece el modelo. Más aún en los casos en que el componente AR presenta dos raíces están resultan ser estadísticamente distintas.

### Referencias

Alfaro, R. (2009) “La Curva de Rendimiento bajo Nelson-Siegel,” Documento de Trabajo N° 531, Banco Central de Chile.

- Campbell, J., A. Lo y A. MacKinlay (1997) *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press.
- Chan, K., G. Karolyi, F. Longstaff y A. Sanders (1992) “An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate” *The Journal of Finance* 47(3):1209-1227.
- Coroneo, L., K. Nyholm y Rositsa Vidova-Koleva (2008) “How arbitrage-free is the Nelson-Siegel Model?” Working Paper N° 874, European Central Bank.
- Cortázar, G., E. Schwartz y L. Naranjo (2007) “Term Structure Estimation in Markets with Infrequent Trading,” *International Journal of Finance and Economics* 12: 353-369.
- Cox, J., J. Ingersoll y S. Ross (1985) “A Theory of the Term Structure of Interest Rate,” *Econometrica* 53: 385-407.
- Diebold, F. y C. Li (2007) “Forecasting the Term Structure of Government Bond Yield,” *Journal of Econometrics* 130: 337-364.
- Diebold, F. y S. Sharpe (1990) “Post-desregulation Bank Deposit Rate Pricing: The Multivariate Dynamics,” *Journal of Business and Economic Statistics* 8: 281-293.
- Duffie, D. y R. Kan (1996) “A Yield-Factor Model of Interest Rates,” *Mathematical Finance* 6: 379-406.
- Fernández, V. (1999) “Estructura de Tasas de Interés en Chile: la Vía No-paramétrica,” *Cuadernos de Economía* 36(109): 1005-1034.
- Hall, A. D., H. M. Anderson y C. Granger (1992) “A Cointegration Analysis of Treasury Bill Yields,” *Review of Economics and Statistics* 74: 116-126.
- Heath, D., R. Jarrow y A. Morton (1992) “Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation,” *Econometrica* 60: 77-105.
- Herrera, L. y I. Magendzo (1997) “Expectativas Financieras y la Curva de Tasas Forward de Chile,” Documento de Trabajo N° 23, Banco Central de Chile.
- Ho, T. S. y S. Lee (1986) “Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims,” *Journal of Finance* 41: 1011-1028.
- Hull, J. y A. White (1990) “Pricing Interest-Rate-Derivative Securities,” *Review of Financial Studies* 3: 573-592.
- Morales, M. (2008) “The Real Yield Curve and Macroeconomic Factors in the Chilean Economy,” *Applied Economics* 2008: 1-13.



- Nelson, C. y A. Siegel (1987) “Parsimonious Modeling of Yield Curve,” *The Journal of Business* 60(4): 473-489.
- Ochoa, J. (2006) “An Interpretation of an Affine Term Structure Model for Chile,” *Estudios de Economía* 33(2): 155-184.
- Pagan, A. R., A. Hall y V. Martin (1996) *Modeling the Term Structure*, Handbook of Statistics, North-Holland, Amsterdam.
- Parisi, F. (1998) “Tasa de Interés Nominal de Corto Plazo en Chile: Una Comparación Empírica de sus Modelos,” *Cuadernos de Economía* 35(105): 161-182.
- Vasicek, O. (1977) “An Equilibrium Characterization of the Term Structure,” *Journal of Financial Economics* 5: 177-188.
- Shea, G. S. (1992) “Benchmarking the Expectations Hypothesis of the Interest-Rate Term Structure: An Analysis of Cointegration Vectors,” *Journal of Business and Economic Statistics* 10: 347-366.
- Spiegel, M. y J. Liu (1999) *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, Segunda Edición, Schaum’s Outlines.
- Swanson N. R. y H. White (1995) “A Model-Selection Approach to Assessing the Information in the Term Structure Using Linear Models and Artificial Neuronal Networks,” *Journal of Business and Economic Statistics* 13: 265-275.
- Zuñiga, S. (1999) “Modelos de Tasas de Interés en Chile: Una Revisión,” *Cuadernos de Economía* 36(108): 875-893.
- Zúñiga, S. y K. Soria (1999). “Estimación de la Estructura Temporal de Tasas de Interés en Chile, 1994-1997” *Estudios de Administración* 6(1): 25-50.

## Anexo

### 1. Demostración Proposición 1

Recordemos que el modelo supone que la tasa corta depende de 2 factores dinámicos ( $z_{1t} = \lambda_{1t} + \lambda_{2t}$ ), los cuales obedecen a una dinámica conjunta como sigue:

$$\Lambda_t \equiv \begin{pmatrix} \lambda_{1t} \\ \lambda_{2t} \\ \lambda_{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \phi & (1-\phi) \\ 0 & 0 & \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{1t-1} \\ \lambda_{2t-1} \\ \lambda_{3t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \\ e_{3t} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

donde los errores tienen media cero y varianzas y covarianzas finitas. Lo anterior también puede ser escrito de forma compacta definiendo

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \phi & (1-\phi) \\ 0 & 0 & \phi \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

De esta forma  $\Lambda_t = F\Lambda_{t-1} + U_t$ , donde  $U_t$  contiene el vector de errores del modelo. Para construir la curva de rendimiento necesitamos computar  $E_t(z_{1t+i})$ , el cual corresponde al valor esperado de la tasa corta, la que es una combinación lineal de los factores 1 y 2. Tomando un vector fila como  $b = (1 \ 1 \ 0)$ , podemos escribir la tasa corta como  $b\Lambda_t$ . De forma análoga tenemos que  $E_t(z_{1t+i}) = E_t(b\Lambda_{t+1}) = bE_t(\Lambda_{t+1}) = bF^i\Lambda_t$ , es decir, lo que necesitamos para el valor esperado es obtener  $F^i$ .

Lo anterior podemos derivarlo de forma recursiva. Notamos que

$$F^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \phi & (1-\phi) \\ 0 & 0 & \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \phi & (1-\phi) \\ 0 & 0 & \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \phi^2 & 2\phi(1-\phi) \\ 0 & 0 & \phi^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

mientras que

$$F^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \phi^2 & 2\phi(1-\phi) \\ 0 & 0 & \phi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \phi & (1-\phi) \\ 0 & 0 & \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \phi^3 & 3\phi^2(1-\phi) \\ 0 & 0 & \phi^3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Generalizando tenemos que

$$F^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \phi^i & i\phi^{i-1}(1-\phi) \\ 0 & 0 & \phi^i \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Con ello tenemos que el valor esperado que nos interesa calcular corresponde a

$$\begin{aligned}
E_t(z_{1t+i}) &= bF^i \Lambda_t = (1 \quad 1 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \phi^i & i\phi^{i-1}(1-\phi) \\ 0 & 0 & \phi^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{1t} \\ \lambda_{2t} \\ \lambda_{3t} \end{pmatrix} \\
&= \lambda_{1t} + \phi^i \lambda_{2t} + i(1-\phi)\phi^{i-1} \lambda_{3t}
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Notamos que, pese a que la tasa corta no depende directamente del tercer factor, su valor esperado si lo hace debido a que este corresponde a la tendencia estocástica del segundo factor. Por este motivo se considera el tercer factor como una variable latente.

Por series sabemos que (Spiegel y Liu, 1999):

$$\sum_{i=0}^{n-1} \phi^i = \frac{1-\phi^n}{1-\phi} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n-1} i\phi^i = \phi \left[ \frac{1-n\phi^{n-1} + (n-1)\phi^n}{(1-\phi)^2} \right]. \tag{A.7}$$

El último resultado es relevante para analizar la componente que acompaña al tercer factor en la predicción de la tasa corta. En particular, notamos que:

$$\sum_{i=0}^{n-1} i(1-\phi)\phi^{i-1} = \left( \frac{1-\phi}{\phi} \right) \sum_{i=1}^{n-1} i\phi^i = \frac{1-n\phi^{n-1} + (n-1)\phi^n}{1-\phi} = \left( \frac{1-\phi^n}{1-\phi} \right) - n\phi^{n-1} \tag{A.8}$$

De este modo, aplicando la HEL, tenemos que

$$\begin{aligned}
z_{nt} &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \lambda_{1t} + \phi^i \lambda_{2t} + i(1-\phi)\phi^{i-1} \lambda_{3t} \right] \\
&= \lambda_{1t} + \left( \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \phi^i \right) \lambda_{2t} + \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} i(1-\phi)\phi^{i-1} \right] \lambda_{3t} \\
&= \lambda_{1t} + \frac{\lambda_{2t}}{n} \left( \frac{1-\phi^n}{1-\phi} \right) + \frac{\lambda_{3t}}{n} \left[ \frac{1-\phi^n}{1-\phi} - n\phi^{n-1} \right]
\end{aligned} \tag{A.9}$$

La última ecuación se obtiene de aplicar los resultados de series presentados anteriormente. Con todo, observamos que el resultado final implica que el modelo obtenido corresponde a Nelson-Siegel.

## 2. Demostración Proposición 2

Utilizando el operador de rezagos  $L$ , tenemos que los factores 2 y 3 pueden ser escritos como sigue:

$$\lambda_{3t} = \frac{e_{3t}}{1-\phi L} \text{ y } \lambda_{2t} = \frac{(1-\phi)\lambda_{3t-1} + e_{2t}}{1-\phi L} = \frac{(1-\phi)e_{3t-1} + (1-\phi L)e_{2t}}{(1-\phi L)^2}. \quad (\text{A.10})$$

Considerando  $F_n = \phi^n$ ,  $G_n = (1-\phi^n)/[n(1-\phi)]$  y  $H_n = G_n - F_{n-1}$ , tenemos que la tasa de madurez  $n$  es  $z_{nt} = \lambda_{1t} + G_n \lambda_{2t} + H_n \lambda_{3t}$ . Tomando la primera diferencia tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta z_{nt} &= (\lambda_{1t} - \lambda_{1t-1}) + G_n (\lambda_{2t} - \lambda_{2t-1}) + H_n (\lambda_{3t} - \lambda_{3t-1}) \\ &= e_{1t} + G_n [(\phi-1)\lambda_{2t-1} + (1-\phi)\lambda_{3t-1} + e_{2t}] + H_n [(\phi-1)\lambda_{3t-1} + e_{3t}] \\ &= e_{1t} + G_n e_{2t} + H_n e_{3t} + (1-\phi)(G_n \lambda_{3t-1} - G_n \lambda_{2t-1} - H_n \lambda_{3t-1}) \\ &= e_{1t} + G_n e_{2t} + H_n e_{3t} + (1-\phi)(F_{n-1} \lambda_{3t-1} - G_n \lambda_{2t-1}) \\ &= e_{1t} + G_n e_{2t} + H_n e_{3t} + (1-\phi)X \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

donde

$$\begin{aligned} X &= F_{n-1} \left[ \frac{e_{3t-1}}{1-\phi L} \right] - G_n \left[ \frac{(1-\phi)e_{3t-2} + (1-\phi L)e_{2t-1}}{(1-\phi L)^2} \right] \\ &= \frac{(1-\phi L)F_{n-1}e_{3t-1} - G_n(1-\phi)e_{3t-2} - G_n(1-\phi L)e_{2t-1}}{(1-\phi L)^2} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Notamos que el lado derecho de (A.11) puede ser factorizado bajo un mínimo común denominador  $(1-\phi L)^2$ , lo que implica que el numerador tendrá una estructura similar a un proceso MA(2). En lo que sigue de este análisis trabajaremos en las autocovarianzas de este proceso con el fin de determinar los signos de ellas.

Trabajando con  $X$ , algo de álgebra indica que el numerador de esta expresión puede ser expresado como la suma de  $F_{n-1}e_{3t-1} - G_n e_{2t-1}$  y  $\phi G_n e_{2t-2} - [F_n + (1-F_n)/n]e_{3t-2}$ , donde en el último corchete se hizo uso de las definiciones de  $F_n$  y  $G_n$ . Tomando  $J_n = [F_n + (1-F_n)/n]$ , podemos trabajar el cambio de tasa como sigue:

$$\begin{aligned}
\Delta z_{nt} &= e_{1t} + G_n e_{2t} + H_n e_{3t} + (1-\phi) \left[ \frac{F_{n-1} e_{3t-1} - G_n e_{2t-1} + \phi G_n e_{2t-2} - J_n e_{3t-2}}{(1-\phi L)^2} \right] \\
&= \frac{(1-\phi L)^2 (e_{1t} + G_n e_{2t} + H_n e_{3t}) + (1-\phi) [F_{n-1} e_{3t-1} - G_n e_{2t-1} + \phi G_n e_{2t-2} - J_n e_{3t-2}]}{(1-\phi L)^2} \\
&= \frac{f_{1t} + f_{2t-1} + f_{3t-2}}{(1-\phi L)^2}
\end{aligned}$$

con  $f_{1t} = e_{1t} + G_n e_{2t} + H_n e_{3t}$ ,  $f_{2t-1} = (1-\phi)(F_{n-1} e_{3t-1} - G_n e_{2t-1}) - 2\phi(e_{1t-1} + G_n e_{2t-1} + H_n e_{3t-1})$   
y  $f_{3t-2} = (1-\phi)(\phi G_n e_{2t-2} - J_n e_{3t-2}) + \phi^2(e_{1t-2} + G_n e_{2t-2} + H_n e_{3t-2})$ .

Para el análisis de autocovarianzas, tomaremos  $w_t = f_{1t} + f_{2t-1} + f_{3t-2}$ . Al rezagar el proceso tenemos  $w_{t-1} = f_{1t-1} + f_{2t-2} + f_{3t-3}$  y  $w_{t-2} = f_{1t-2} + f_{2t-3} + f_{3t-4}$ . De este modo, las autocovarianzas pueden ser obtenidas si se considera que la volatilidad del error  $e_{it}$  es  $\sigma_i$  y no hay correlación entre los errores, ni a través del tiempo. Así, las autocovarianzas son  $E(w_t w_{t-1}) = E(f_{2t-1} f_{1t-1} + f_{3t-2} f_{2t-2})$  y  $E(w_t w_{t-2}) = E(f_{3t-2} f_{1t-2})$ .

Simplificando notamos que  $f_{2t-1} = -2\phi e_{1t-1} - (1+\phi)G_n e_{2t-1} + [(1-\phi)F_{n-1} - 2\phi H_n]e_{3t-1}$  y  $f_{3t-2} = \phi^2 e_{1t-2} + \phi G_n e_{2t-2} + [\phi^2 H_n - (1-\phi)J_n]e_{3t-2}$ . Con ello obtenemos los términos requeridos arriba  $E(f_{2t-1} f_{1t-1}) = -2\phi\sigma_1^2 - [(1+\phi)]G_n^2\sigma_2^2 + [(1-\phi)F_{n-1} - 2\phi H_n]H_n\sigma_3^2$ ,  $E(f_{3t-2} f_{2t-2}) = -2\phi^3\sigma_1^2 - (1+\phi)\phi G_n^2\sigma_2^2 + [\phi^2 H_n - (1-\phi)J_n][(1-\phi)F_{n-1} - 2\phi H_n]\sigma_3^2$  y  $E(f_{3t-2} f_{1t-2}) = \phi^2\sigma_1^2 + \phi G_n^2\sigma_2^2 + [\phi^2 H_n - (1-\phi)J_n]H_n\sigma_3^2$ . Es claro que el signo de estos elementos depende de la madurez de la tasa bajo análisis, por tanto no se puede extraer una conclusión sobre las autocovarianzas de forma directa.

Sin embargo, para la tasa corta ( $n=1$ ) tenemos que  $F_n = \phi$ ,  $F_{n-1} = 1$ ,  $G_n = 1$  y  $H_n = 0$ , de este modo  $J_n = 1$ . Esto implica que varias de las expresiones pueden ser colapsadas. En particular, al realizar los reemplazos en las expresiones anteriores tenemos  $E(f_{2t-1} f_{1t-1}) = -2\phi\sigma_1^2 - [(1+\phi)]\sigma_2^2$ ,  $E(f_{3t-2} f_{2t-2}) = -2\phi^3\sigma_1^2 - (1+\phi)\phi\sigma_2^2 - (1-\phi)^2\sigma_3^2$  y  $E(f_{3t-2} f_{1t-2}) = \phi^2\sigma_1^2 + \phi\sigma_2^2$ . Esto implica para la primera y segunda autocovarianzas:

$E(w_t w_{t-1}) = -2\phi\sigma_1^2(1+\phi^2) - (1+\phi)^2\sigma_2^2 - (1-\phi)^2\sigma_3^2$  y  $E(w_t w_{t-2}) = \phi(\phi\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ . Luego bajo  $0 < \phi < 1$ , la primera es negativa y la segunda positiva.

Si consideramos un proceso ruido blanco  $u_t$ , tal que  $w_t = u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2}$ , entonces sus autocovarianzas son  $E(w_t w_{t-1}) = \theta_1 \sigma_u^2 + \theta_1 \theta_2 \sigma_u^2 = \theta_1 \sigma_u^2 (1 + \theta_2)$  y  $E(w_t w_{t-2}) = \theta_2 \sigma_u^2$ . Dado que la primera es negativa y la segunda es positiva, esto implica que  $\theta_2$  debe ser positivo y  $\theta_1$  negativo, es decir, es posible evaluar el modelo utilizando directamente la tasa corta y la alternancia en signo de los componentes del MA.

Volviendo al caso general notamos que la estimación del proceso MA(2) nos entrega 2 estimadores para  $\theta_1$  y  $\theta_2$  lo que no permite la identificación de las 3 varianzas de los factores. Por ello es necesario utilizar un estimador de la varianza del proceso ( $\sigma_u^2$ ). De esta forma cotejamos dicha estimación con la varianza del proceso  $w_t$ , la que cual es  $E(w_t^2) = (1 + 4\phi^2 + \phi^4)\sigma_1^2 + [1 + (1+\phi)^2 + \phi^2]G_n^2\sigma_2^2 + K_n\sigma_3^2$ , donde  $K_n$  se obtiene de los ponderados de los errores del tercer factor.

### 3. Resultados ARMAs

En esta sección se presentan los resultados ampliados para los modelos ARMA's seleccionados según los criterios de información AIC y BIC.

Tabla A1: Coeficientes de Modelos ARMA Favoritos para Tasas de EEUU – *Benchmark* a 3 Meses

	(1)	(2)
Constante	-0.0006 (0.04)	-0.0005 (0.04)
AR(1)	-0.8061 (3.62)***	-0.4386 (1.29)
AR(2)	-0.6321 (3.42)***	-0.2084 (0.61)
AR(3)		0.3678 (1.23)
AR(4)		0.1065

		(0.62)
MA(1)	1.2484 (6.79)***	0.8808 (3.02)***
MA(2)	0.9526 (3.69)***	0.3653 (0.84)
MA(3)	0.1749 (1.07)	-0.3768 (0.92)
MA(4)	-0.1844 (2.11)**	-0.4358 (2.08)**
Observaciones	915	915
log(L)	-320.09	-319.68
AIC	656.18	659.36
BIC	694.73	707.55

Test t robusto entre paréntesis. \*, \*\* y \*\*\* significativo al 10%, 5% y 1%, respectivamente.

Tabla A2: Coeficientes de Modelos ARMA Favoritos para Tasas de EEUU – *Benchmark* a 1 Año

	(1)	(2)
Constante	-0.0027 (0.13)	-0.0026 (0.13)
AR(1)	-0.7443 (5.20)***	-1.0812 (0.66)
AR(2)	-0.6292 (5.57)***	-1.0804 (0.49)
AR(3)		-0.3755 (0.21)
AR(4)		-0.2413 (0.19)
MA(1)	1.2515 (8.62)***	1.5940 (1.00)
MA(2)	1.0226 (4.57)***	1.6400 (0.54)
MA(3)	0.2329 (1.22)	0.8064 (0.3)
MA(4)	-0.2088 (2.05)**	0.1525 (0.08)
Observaciones	684	684
log(L)	-294.40	-292.78

AIC	604.79	605.55
BIC	641.02	650.83

---

Test t robusto entre paréntesis. \*, \*\* y \*\*\* significativo al 10%, 5% y 1%, respectivamente.

Tabla A3: Coeficientes de Modelos ARMA Favoritos para Tasas de EEUU – *Benchmark* a 3 Años

	(1)	(2)	(3)	(4)
Constante	-0.0011 (0.06)	-0.0012 (0.08)	-0.0012 (0.08)	-0.0012 (0.07)
AR(1)	-0.1155 (0.76)	0.5964 (1.89)*	-0.5077 (1.83)*	-1.2279 (3.49)***
AR(2)			-0.1753 (0.60)	-1.2552 (3.16)***
AR(3)			0.5629 (2.23)**	-0.4672 (1.22)
AR(4)				-0.3284 (2.65)***
MA(1)	0.5684 (5.19)***	-0.1519 (0.55)	0.9545 (3.95)***	1.6968 (4.92)***
MA(2)		-0.3534 (2.32)**	0.3553 (0.99)	1.7816 (3.16)***
MA(3)			-0.5503 (1.63)	0.8852 (1.55)
MA(4)			-0.3749 (3.07)***	0.2847 (1.08)
Observaciones	684	684	684	684
log(L)	-214.90	-213.48	-202.81	-197.29
AIC	437.79	436.96	423.61	414.57
BIC	455.91	459.60	464.37	459.85

Test t robusto entre paréntesis. \*, \*\* y \*\*\* significativo al 10%, 5% y 1%, respectivamente.

Tabla A4: Coeficientes de Modelos ARMA Favoritos para Tasas de EEUU – *Benchmark* a 5 Años

	(1)	(2)	(3)
Constante	0.0001 (0.00)	0.0000 (0.00)	0.0000 (0.00)



AR(1)	-0.1285 (1.11)	1.0172 (59.4)***	-0.9385 (6.17)***
AR(2)		-0.9720 (65.73)***	-0.8372 (5.01)***
AR(3)			-0.0672 (0.52)
AR(4)			-0.1978 (2.45)**
MA(1)	0.5986 (7.01)***	-0.5477 (9.90)***	1.4151 (10.37)***
MA(2)		0.4558 (7.68)***	1.2055 (6.73)***
MA(3)		0.5130 (9.21)***	0.2991 (2.14)**
Observaciones	684	684	684
log(L)	-134.61	-126.14	-123.71
AIC	277.23	264.27	265.42
BIC	295.34	291.44	306.17

Test t robusto entre paréntesis. \*, \*\* y \*\*\* significativo al 10%, 5% y 1%, respectivamente.

Tabla A5: Coeficientes de Modelos ARMA Favoritos para Tasas de EEUU – *Benchmark* a 10 Años

	(1)	(2)	(3)	(4)
Constante	0.0016 (0.12)	0.0015 (0.13)	0.0016 (0.13)	0.0016 (0.13)
AR(1)	-0.2007 (1.68)*	0.2326 (0.49)	-0.8635 (4.00)***	-1.3726 (3.39)***
AR(2)			-0.8602 (1.57)	-1.4056 (2.83)***
AR(3)				-0.5382 (1.29)
AR(4)				-0.2812 (2.53)**
MA(1)	0.6080 (6.76)***	0.1685 (0.37)	1.2681 (6.26)***	1.7877 (4.42)***
MA(2)		-0.2094 (1.02)	1.1195 (2.59)***	1.8740 (2.76)***

MA(3)			0.2312 (1.10)	0.9171 (1.47)
MA(4)			-0.1398 (2.30)**	0.2537 (1.06)
Observaciones	684	684	684	684
log(L)	-37.97	-37.23	-31.96	-27.70
AIC	83.94	84.45	79.92	75.41
BIC	102.05	107.09	116.15	120.69

Test t robusto entre paréntesis. \*, \*\* y \*\*\* significativo al 10%, 5% y 1%, respectivamente.

Tabla A6: Coeficientes de Modelos ARMA Favoritos para Tasas de EEUU – *Benchmark* a 20 Años

	(1)	(2)	(3)	(4)
Constante	0.0046 (0.37)	0.0046 (0.39)	0.0046 (0.39)	0.0046 (0.39)
AR(1)	-0.1845 (1.20)	0.2488 (0.62)	-0.0075 (0.04)	-0.0047 (0.02)
AR(2)			-0.8397 (7.11)***	-0.8439 (4.48)***
AR(3)			-0.2586 (1.56)	-0.2545 (1.13)
AR(4)				-0.0027 (0.03)
MA(1)	0.5714 (4.66)***	0.1318 (0.34)	0.3877 (2.11)**	0.3846 (1.69)*
MA(2)		-0.1958 (1.19)	0.7540 (5.78)***	0.7562 (5.48)***
MA(3)			0.5360 (3.83)***	0.5329 (2.90)***
Observaciones	602	602	602	602
log(L)	25.53	26.18	31.07	31.07
AIC	-43.07	-42.36	-46.14	-44.14
BIC	-25.47	-20.36	-10.94	-4.54

Test t robusto entre paréntesis. \*, \*\* y \*\*\* significativo al 10%, 5% y 1%, respectivamente.

Tabla A7: Coeficientes de Modelos ARMA Favoritos para Tasas de EEUU – *Benchmark* a 30 Años

	(1)	(2)	(3)	(4)
Constante	-0.0059 (0.29)	-0.0061 (0.31)	-0.0059 (0.28)	-0.0059 (0.30)
AR(1)	-0.1418 (0.94)	0.2699 (0.47)	1.0208 (26.4)***	-0.5132 (15.36)***
AR(2)			-0.9550 (24.39)***	-0.9372 (40.90)***
MA(1)	0.5511 (4.75)***	0.1351 (0.24)	-0.6178 (7.11)***	0.9247 (11.10)***
MA(2)		-0.1908 (0.79)	0.5045 (5.04)***	1.1062 (10.52)***
MA(3)			0.4549 (6.27)***	0.3343 (3.11)***
MA(4)				-0.1022 (1.38)
Observaciones	350	350	350	350
log(L)	-52.69	-52.45	-48.42	-49.49
AIC	113.38	114.91	110.83	112.97
BIC	128.82	134.20	137.84	139.98

Test t robusto entre paréntesis. \*, \*\* y \*\*\* significativo al 10%, 5% y 1%, respectivamente.